BASEL
LANDSCHAFT

BILDUNGS-, KULTUR- UND SPORTDIREKTION
GYMNASIUM OBERWIL

Maturprüfung 2023
Mathematik Profil A

Klasse / Kurs:	4a (Profil A)
Anzahl Seiten (ohne Deckblatt):	4 Seiten für die Aufgaben 1 bis 6
Inhalt:	Maturitätsprüfung 2023 Mathematik schriftlich, Profil A
Anweisungen/ Erläuterungen:	Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer **neuen Seite**.
Hilfsmittel:	Formelsammlung DMB «Formeln – Tabellen – Begriffe» Grafikfähiger Taschenrechner TI-83, TI-83+ oder TI-84+
Bewertung:	Maximal 72 Punkte Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angegeben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Aufgabe 1: Rollende Kugel

3+2+2+5=12 Punkte

Gegeben sind die beiden sich schneidenden Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

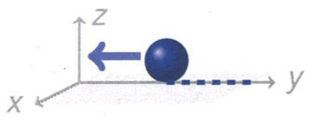
a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene $\mathbb{E}$, welche von g und h aufgespannt wird.

▷ *Falls Sie **a)** nicht lösen konnten, rechnen Sie mit der (falschen!) Ebenengleichung* $2x-2y+z=0$ *weiter*

b) In welcher Geraden schneidet die Ebene $\mathbb{E}$ die xy-Ebene?
Geben Sie eine Parametergleichung der Schnittgeraden an.

c) Berechnen Sie den spitzen Winkel α, in dem $\mathbb{E}$ die xy-Ebene schneidet.

d) Eine Kugel mit Radius $r = 6$ rollt auf den Koordinatenursprung zu, und zwar so, dass ihre "Spur" auf der positiven y-Achse verläuft:



In dem Augenblick, wo die Kugel die Ebene $\mathbb{E}$ berührt, bleibt sie stehen.

d.1) Wo befindet sich in diesem Moment der Mittelpunkt der Kugel?

d.2) Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts T an, wo die Kugel an der Ebene $\mathbb{E}$ anstösst.

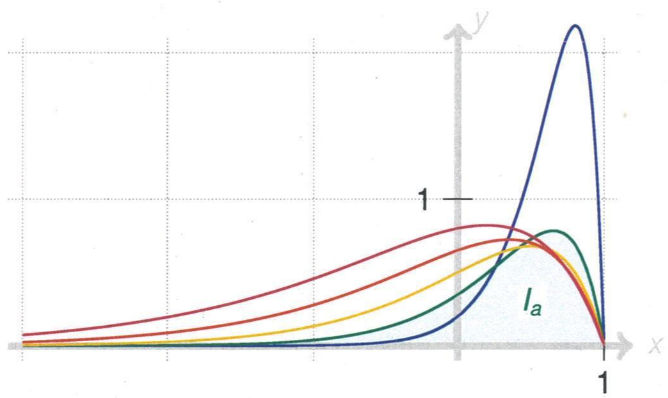
Aufgabe 2: Minimale Fläche

5+4=9 Punkte

Wir betrachten für verschiedene positive Werte des Parameters a die Funktion

$$y = f_a(x) = (-ax + a) \cdot e^{x/a} \qquad (a > 0)$$

Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf einiger Graphen:



Jeder dieser Graphen schliesst mit der x-Achse ein nach links unbegrenztes, auf der rechten Seite bei $x = 1$ endendes Gebiet ein (getönte Fläche in der Abbildung).

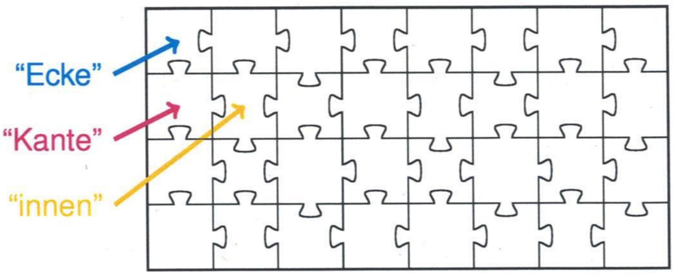
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt I_a des Gebiets in Abhängigkeit von a.
Verwenden Sie dafür eine geeignete Integrationsmethode.

b) Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt **minimal**?
Geben Sie sowohl a als auch den minimalen Flächeninhalt **exakt** an.
▷ *Falls Sie **a)** nicht lösen konnten, verwenden Sie anstelle der richtigen Flächenformel die **Alternative*** $I_a = (3a^2 + 2a) \cdot e^{1/a}$

Aufgabe 3: Zufällige Puzzleteilchen

$1\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+2+2+1+3+2=14$ Punkte

Wir betrachten Puzzlespiele mit $n \times 2n$ **quadratischen** Teilen.
Alle Teile sind verschieden; das Puzzle passt nur auf eine einzige Art zusammen.



Beispielbild: Ein $n \times 2n$-Puzzle. Hier ist $n = 4$

In den ersten vier Teilaufgaben geht es um den **Fall $n = 5$**.

a) Wie viele Ecken, Kantenteile bzw. innere Teile gibt es?

b) Wie viele Arten gibt es, alle Puzzleteile in einer Reihe nebeneinander anzuordnen, wenn zuerst alle Ecken, dann alle Kantenteile und erst dann alle inneren Teile kommen sollen?

c) Sie halten ein zufällig ausgesuchtes inneres Teilchen in der Hand und ziehen auf gut Glück ein weiteres, diesmal **beliebiges**, Teilchen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Teilchen zusammenpassen?

d) Sie halten ein zufällig ausgesuchtes **beliebiges** Teilchen in der Hand und ziehen auf gut Glück ein weiteres Teilchen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Teilchen zusammenpassen?

In den nun folgenden Teilaufgaben ist ***n* unbekannt**.

e) Aus einem grossen $n \times 2n$-Puzzle wird zufällig ein Teilchen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen mindestens eine gerade Seite hat (also ein Kantenstück oder eine Ecke ist)?
Geben Sie Ihre Antwort als Term in n an.

▷ *Falls Sie **e)** nicht lösen konnten, rechnen Sie mit der (falschen!) Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2n+16}{n^2}$ weiter*

f) Aus einem grossen $n \times 2n$-Puzzle werden zufällig 100 Teilchen gezogen (ob mit oder ohne Zurücklegen, spielt hier keine Rolle). Geben Sie den Erwartungswert der Anzahl "gerade begrenzter" Teilchen in der Stichprobe an.

Lässt sich anhand der Zusammensetzung einer Stichprobe die Grösse des Puzzlespiels schätzen? Wir nehmen an, dass wir **100** Teilchen gezogen haben und **16 davon** gerade Seiten aufweisen.

g) Für eine plausible Schätzung der Grösse n des $n \times 2n$-Puzzlespiels nehmen wir an, dass die Anzahl gezogener Teilchen mit geraden Seiten dem Erwartungswert entspricht. Wie gross wäre das Spiel gemäss dieser Schätzmethode?

h) Die Schätzung aus **g)** ist nur *eine* Möglichkeit – auch grössere Puzzlespiele hätten zum beobachteten Ergebnis führen können.
Betrachten Sie den Fall, dass aus einem **24**$\times$**48**-Puzzlespiel eine 100er-Stichprobe genommen wurde und sich darin 16 Teilchen mit geraden Seiten befinden.
Handelt es sich dabei um ein seltenes Extremereignis, oder ist es noch im Bereich dessen, was durchaus mal vorkommt?
Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung. Legen Sie offen, welche Annahmen Sie dabei getroffen haben.

Aufgabe 4: Komplexe Abbildung

$1+2+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3+4=14$ Punkte

Wir betrachten die komplexe Funktion f mit der Gleichung

$$w = f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$$

a) Auf welcher Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist diese Funktion definiert?

b) Betrachten Sie die durch f gegebene Iterationsfolge (z_n) mit
$$\begin{cases} z_0 &= 1+\mathrm{i} \\ z_n &= f(z_{n-1}) \quad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$
Berechnen Sie so viele Folgenglieder (in Normalform $a+b\mathrm{i}$), dass Sie das Verhalten der Folge erkennen können. Beschreiben Sie das Verhalten durch ein Stichwort.

c) Geben Sie eine Funktionsgleichung an für die Umkehrabbildung $z = f^{-1}(w)$

d) Die Funktion f lässt sich als Komposition aus einer linearen Funktion, Inversion und nochmals einer linearen Funktion darstellen:
$z \overset{\ell_1}{\mapsto} \ell_1(z) \overset{\text{inv.}}{\mapsto} \frac{1}{\ell_1(z)} \overset{\ell_2}{\mapsto} f(z)$
Geben Sie die beiden linearen Funktionen ℓ_1 und ℓ_2 an, die hierfür nötig sind.

e) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse unter der Abbildung f.
*Eine Untersuchung, ob die Abbildung jeden Punkt des angegebenen Bildes auch wirklich erreicht, wird **nicht** verlangt.*

f) Zeigen Sie, dass das Bild der reellen Achse unter der Abbildung f der Einheitskreis ist.
*Eine Untersuchung, ob die Abbildung jeden Punkt des Einheitskreises auch wirklich erreicht, wird **nicht** verlangt.*

Aufgabe 5: Wandernder Hochpunkt

7+5+3=15 Punkte

Wir betrachten eine Familie von kubischen Funktionen

$$y = f_b(x) = \frac{27}{b^4} \cdot x \cdot (x-b)^2 \qquad (b > 0)$$

a) In dieser Teilaufgabe sei zunächst $\boldsymbol{b = 3}$.
Bestimmen Sie alle Nullstellen sowie die Koordinaten aller Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von $f_3(x)$.

Ab jetzt soll der Wert von $\boldsymbol{b}$ positiv, aber ansonsten **beliebig** sein.

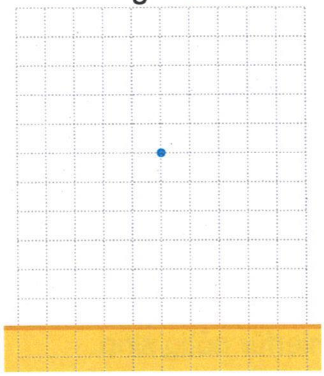
b) Für jeden Graphen aus der beschriebenen Familie liegt der Hochpunkt anders.
Geben Sie eine Gleichung an für die Kurve, auf der alle Hochpunkte liegen.
▷ *In **b)** wird der Nachweis, dass es sich um einen Hochpunkt handelt, **nicht nochmals** verlangt.*

c) Zwischen seinen beiden Nullstellen begrenzt der Graph von f_b zusammen mit der x-Achse ein endliches Gebiet G.
Berechnen Sie den Flächeninhalt von G und zeigen Sie dabei, dass er nicht von b abhängt.

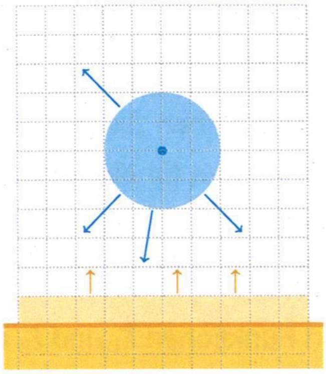
Aufgabe 6: Fliessende Farben

7+1=8 Punkte

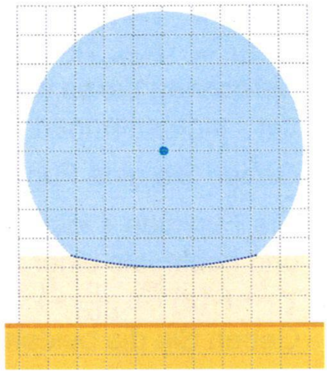
Ein Chromatografiestreifen ist mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem versehen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Streifen bis zur x-Achse in eine gelbe Flüssigkeit eingetaucht, welche mit einer Fliessgeschwindigkeit von 1 Einheit pro Sekunde im Streifen aufwärts fliesst.
Zum gleichen Zeitpunkt wird im Punkt $(0|6)$ ein Tropfen einer blauen Flüssigkeit aufgebracht, der sich mit einer radialen Fliessgeschwindigkeit von 2 Einheiten pro Sekunde kreisförmig ausbreitet.



zum Anfangszeitpunkt $t = 0$



zur Zeit $t = 1$



zur Zeit $t = 2.4$

Da sich die beiden Flüssigkeiten nicht mischen, behält der Chromatografiestreifen an jeder Stelle diejenige Farbe, welche die Stelle zuerst erreicht hat.

a) Die Farbgrenze hat die Form eines Kegelschnitts. Leiten Sie eine **Mittelpunktgleichung** für diesen Kegelschnitt her und machen Sie die folgenden Angaben:

- Art des Kegelschnitts
- Koordinaten des Mittelpunkts
- Koordinaten des auf dem Streifen sichtbaren Scheitels
- Falls vorhanden: Geradengleichungen der Asymptoten

b) Beantworten Sie nur mit Stichwort und *ohne Rechnung*:
Welcher Kegelschnitt würde entstehen, wenn die blaue und die gelbe Flüssigkeit die **gleiche** Fliessgeschwindigkeit hätten?